ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia, 1º semestre, 1ª prova intercalar 06. 11. 18
1hora. (10 valores)

Nome:____**Turma:**_________

Espaço reservado para classificações					
1.(15)	2a.(10)	2c.(15)	3a.(10)	3c.(15)	4.(10)
	2b.(10)		3b.(15)		

Atenção: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. Um exame é composto de várias perguntas de resposta múltipla, cada uma com 4 alternativas. Dependendo do grau de apreensão da matéria, um aluno pode encontrar-se num de três graus de conhecimento em relação a cada uma das questões que compõem o exame: saber a resposta certa à questão, conseguir eliminar uma das 4 alternativas e escolher aleatoriamente uma das restantes ou escolher ao acaso entre as 4 alternativas. A probabilidade de saber a resposta certa é 0.5, a probabilidade de conseguir eliminar uma das 4 escolhas possíveis é 0.25. Sabendo que o aluno escolheu a resposta certa, qual a probabilidade de ele saber a resposta (isto é de estar na primeira situação)?

A_1 – saber a resposta certa; A_2 – eliminar uma das alternativas; A_3 – escolher ao acaso

S – Acertar na resposta

$$P(A_1) = 0.5;\ P(A_2) = 0.25; P(A_3) = 0.25;\ P(S|A_1) = 1;\ P(S|A_2) = \frac{1}{3};\ P(S|A_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1|S) = \frac{P(A_1 \cap S);}{P(S)} = \frac{P(S|A_1) * P(A_1)}{P(S|A_1) * P(A_1) + P(S|A_2) * P(A_2) + P(S|A_3) * P(A_3)}$$

$$= \frac{1*0.5}{1*0.5++\frac{1}{3}*0.25+\frac{1}{4}*0.25} = \frac{0.5}{0.6458} = 0.7742$$

2. O Marco e a Lisa são agentes imobiliários. Sejam (X, Y) as variáveis aleatórias que representam o número de apartamentos vendidos mensalmente pelo Marco e pela Lisa respetivamente. A função probabilidade conjunta de X e Y é dada por:

$y \setminus x$	0	1	2	f(y)
0	0.12	0.42	0.06	0.6
1	0.21	0.06	0.03	0.3
2	0.07	0.02	0.01	0.1
f(x)	0.4	0.5	0.1	

a) Qual a probabilidade de a Lisa vender mais apartamentos do que o Marco?
$P(X < Y)$= $P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 2)$=0.21+0.07+0.02=0.30

b) Calcule $\operatorname{cov}(X,Y)$ e $E(X^2Y)$. Será que de algum dos resultados anteriores pode inferir que existe uma associação positiva entre as variáveis X e Y ? Justifique.

$E(X) = \sum_{x=0}^{2} x * f_X(x) = 0.7; E(Y) = \sum_{y=0}^{2} y * f_Y(y) = 0.5$

$E(X^2) = \sum_{x=0}^{2} x^2 * f_X(x) = 0.9; E(Y^2) = \sum_{y=0}^{2} y^2 * f_Y(y) = 0.7$

$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = 0.41;\ Var(Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2 = 0.45$

$E(X.Y) = \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{2} x * y * f_{X,Y}(x,y) = 0.2; Cov(X.Y) = E(X.Y) - E(X) * E(Y) = -0.15$

$E(X^2.Y) = \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{2} x^2 * y * f_{X,Y}(x,y) = 0.3$

c) Qual a média de apartamentos vendidos pelo Marco num mês em que a Lisa não vende qualquer apartamento?

$$E(X|Y=0) = \sum_{x=0}^{2} x * f_{X|Y=0}(x) = \sum_{x=0}^{2} x * \frac{f_{X,Y}(x,0)}{f_Y(0)} = 0.9$$

3. Seja a variável aleatória X com função distribuição dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ kx^2 & 0 \leq x < 10 \\ 100k & x \geq 10 \end{cases} \quad (k > 0\ constante)$$

a) Mostre que $k = 0.01$ e calcule $P(X > med(X) \mid X > 5)$, sendo $med(X)$ a mediana de X.

$F_X(10) = 1 \Leftrightarrow 100k = 1 \Leftrightarrow k = 0.01$

$$\mu_e = med(X): P(X \leq \mu_e) = 0.5 \Leftrightarrow F_X(\mu_e) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0.01 * {\mu_e}^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu_e = 7.0712$$

$$P(X > \mu_e | X > 5) = \frac{P(X > \mu_e)}{P(X > 5)} = \frac{0.5}{1 - P(X \leq 5)} = \frac{0.5}{1 - F_X(5)} = \frac{0.5}{0.75} = 0.666(7)$$

b) Calcule o valor esperado e a variância da variável aleatória X.

$$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 2kx & 0 \leq x < 10 \\ 0 & outros\ valores\ de\ x \end{cases}; \quad k: F(+\infty) = 1 \Leftrightarrow 100k = 1 \Leftrightarrow k = \tfrac{1}{100}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_X(x) dx = \int_0^{10} x * \tfrac{2x}{100} dx = \int_0^{10} \tfrac{2x^2}{100}\, dx = \tfrac{2}{100} \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^{10} = \tfrac{2}{100} \tfrac{10^3}{3} = 20/3$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * f_X(x) dx = \int_0^{10} x^2 * \tfrac{2x}{100} dx = \int_0^{10} \tfrac{2x^3}{100}\, dx = \tfrac{2}{100} \left[\tfrac{x^4}{4}\right]_0^{10} = \tfrac{2}{100} \tfrac{10^4}{4} = 50$$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = 50 - \left(\frac{20}{3}\right)^2 = 5.5556$$

c) Determine a função distribuição da variável aleatória $Y = \begin{cases} 1 & X \leq 3 \\ 2X & X > 3 \end{cases}$. Classifique, **justificando,** a variável aleatória Y.

$D_Y = \{1\};\ A_1 = \{x: y = 1\} = \{x: x \le 3\} \Rightarrow P(Y = 1) = P(X \le 3) = F_X(3) = \frac{9}{100} > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ P(X \le 3) & 1 \le y < 6 \\ P(2X \le y) & 6 \le y < 20 \\ 1 & y \ge 20 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ F_X(3) & 1 \le y < 6 \\ F_X(y/2) & 6 \le y < 20 \\ 1 & y \ge 20 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ 0.09 & 1 \le y < 6 \\ 0.005\,y^2 & 6 \le y < 20 \\ 1 & y \ge 20 \end{cases}$$

$F_Y(1) \neq F_Y(1^-)$ logo existe um ponto de descontinuidade em $x = 1$ e $P(Y = 1) < 1$

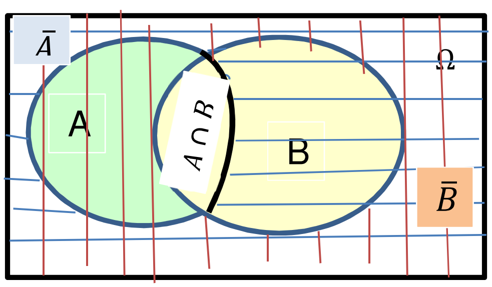
Como $F_Y(y)$ depende de y para $6 \le y < 20$ a variável aleatória será mista.

4. Sendo A e B dois acontecimentos definidos no mesmo espaço de resultados Ω com $P(\bar{A}) = \alpha$ e $P(\bar{B}) = \beta$, prove que $P(A \cap B) \ge 1 - \alpha - \beta$.

Duas de entre várias soluções possíveis:

Sol 1: ,

Provar que $P(A \cap B) \ge 1 - \alpha - \beta$.



$$P(A \cap B) = P[\Omega - (\bar{A} \cup \bar{B})] = P(\Omega) - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - [P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})]$$
$$= 1 - [\alpha + \beta - P(\bar{A} \cap \bar{B})] = 1 - \alpha - \beta + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

Se $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - \alpha - \beta$

Se $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) > 0 \Rightarrow P(A \cap B) > 1 - \alpha - \beta$

Sol 2

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

Como $P(A) = 1 - \alpha$ e $P(B) = 1 - \beta$ vem

$P(A \cap B) = 1 - \alpha + 1 - \beta - P(A \cup B) = 1 - \alpha - \beta + \left(1 - P(A \cup B)\right)$

Como $0 \le P(A \cup B) \le 1$, tem-se $0 \le 1 - P(A \cup B) \le 1$ e portanto $P(A \cap B) \ge 1 - \alpha - \beta$